

问题, 转化为边长为 1 的正方体的外接球问题, 则有外接球直径 $2R = \sqrt{3}$, 于是此球的表面积为 $4\pi R^2 = 3\pi$. 故选 A.

点评: 本题充分利用正四面体的几何特性, 从而可以转化为更特殊的图形——正方体, 进而把问题转化.

八、利用数形结合的思想解决平面向量问题

例 17. (2017 年惠州市二调) 如图 19, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是 DC 的中点, 点 F 是 BC 的一个三等分点, 那么 $\overrightarrow{EF} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
 B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

解析: 建立如图 20 坐标系, 令 $B(1,0)$, $D(0,1)$, 则 $E(\frac{1}{2}, 1)$, $F(1, \frac{1}{3})$, 所以 $\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$.

故选 D.

点评: 充分利用向量较强的几何意义, 通过建立坐标系, 可以把“形”转化为“数”, 从而解决问题.

例 18. (2016 年广州市模拟题) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 的坐标分别为 $(0,1), (\sqrt{2}, 0), (0,-2)$, O 为坐标原点, 动点 P 满足 $|\overrightarrow{CP}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}|$ 的最小值是 ()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{11}-1$ C. $\sqrt{3}+1$ D. $\sqrt{11}+1$

解析: 如图 21, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}| =$

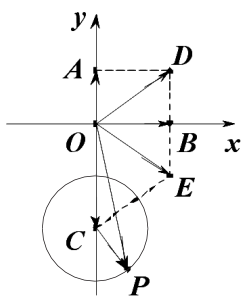


图 21

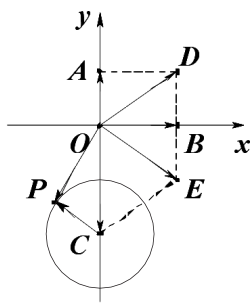


图 22

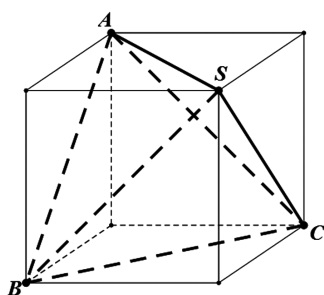


图 19

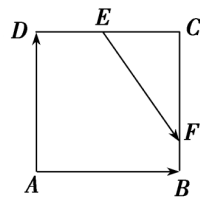


图 19

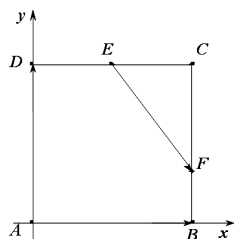


图 20

$|\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CP}|$, 故当 $\overrightarrow{CP} \parallel \overrightarrow{OE}$ 且方向相反时 $|\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CP}|$ 最小, 如图 22, 这时 $|\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{OE}| - |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{3} - 1$. 故选 A.

点评: 结合图形, 运用向量的加法的几何意义将 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}|$ 化简, 然后结合模的几何意义, 通过数形结合求解.

九、利用数形结合的思想 解决概率问题

运用数形结合的思想解决概率问题一般是针对几何概型, 解几何概型问题的关键是确定“测度”, 常见的测度有: 长度、面积、体积等.

例 19. 某公司的班车在 7:30, 8:00, 8:30 发车, 小明在 7:50 至 8:30 之间到达车站乘坐班车, 且到达发车的时候是随机的, 则他等车时间不超过 10 分钟的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

解析: 如图 23 所示, 画出时间轴:

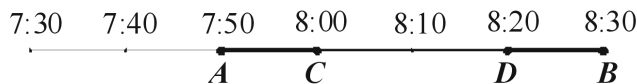


图 23

小明到达的时间会随机的落在图中线段 AB 中, 而当他的到达时间落在线段 AC 或 DB 时, 才能保证他等车的时间不超过 10 分钟. 根据几何概型, 所求概率 $P = \frac{10+10}{40} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

点评: 这是全国卷首次考查几何概型, 主要是考查长度比.

例 20. 在 $[-1, 1]$ 上随机地取一个数 k , 则事件“直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2 + y^2 = 9$ 相交”发生的概率为 _____.

解析: 如图 24, 直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2 + y^2 = 9$ 相交, 需要满足圆心到直线的距离小

于半径, 即 $d = \frac{|5k|}{\sqrt{1+k^2}}$

< 3 , 解得 $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$, 而 $k \in [-1, 1]$, 所以所求

概率 $P = \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

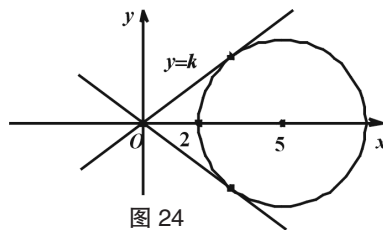


图 24

点评: 本题是高考常考知识内容. 本题综合性较强, 具有“无图考图”的显著特点, 几何概型概率的计算问题, 涉及圆心距的计算, 与弦长相关的问题, 往往要关注“圆的特征直角三角形”, 本题能较好的考查考生分析问题解决问题的能力、基本计算能力等.

例 21. (2016 年江西省赣中南五校第一次考试题 (理)) 不等式组 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ 表示的点集记为 M , 不等式组 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0, \\ y \geq x^2 \end{cases}$ 表示的点集记为 N , 在 M 中任取一点 P , 则 $P \in N$ 的概率为 ()